Tija Stritih, Tea Krč, Žana Lampič:

GIMNAZIJA KRANJ V ZLATEM REZU

GIMNAZIJA KRANJ IN GOLDEN RATIO

DOI: https://doi.org/10.15292/IU-CG.2024.12.014-018 ▌UDK: 72.012:727:373.5(497.4Kranj) ▌SUBMITTED: August 2024 / PUBLISHED: September 2024

1.04 Strokovni članek / Professional Article

POVZETEK

Zlati rez je razmerje, ki se nam zdi popolno in lepega videza. Daljico deli na dva neenaka dela, da je razmerje dolžine večjega dela daljice proti manjšemu enako razmerju celotne daljice proti daljšemu delu. To razmerje znaša približno 1,618 in ima neskončno mnogo decimalk. V članku je predstavljen zlati rez ter njegova prisotnost v naravi, človeškem telesu in umetnosti. Poleg tega ga najdemo tudi v arhitekturi, saj ga zaradi njegove lepote arhitekti pogosto uporabljajo pri načrtovanju zgradb. V članku je opisana tudi zgodovina Gimnazije Kranj. V raziskavi smo želeli ugotoviti, ali je razlog lepega videza Gimnazije Kranj pravzaprav v zlatem rezu. Poseben poudarek smo torej namenili dokazovanju prisotnosti zlatega reza v arhitekturnih elementih Gimnazije Kranj s pomočjo meritev iz arhitekturnega načrta. Za pomoč pri iskanju zlatega reza smo izdelali sistem točk za iskanje zlatega reza v računalniškem programu GeoGebra ter šestilo za iskanje zlatega reza. Namen raziskave je torej ugotoviti, ali je Gimnazija Kranj grajena v zlatem rezu. Na koncu smo njegovo prisotnost na Gimnaziji lahko potrdili, poleg njega pa smo na stavbi opazili tudi zlate spirale in zlate pravokotnike.

KLJUČNE BESEDE

zlati rez, razmerje, zlata spirala, arhitektura, Gimnazija Kranj

UVODNIK
EDITORIAL
ČLANEK
ARTICLE
RAZPRAVA
DISCUSSION
RECENZIJA
REVIEW
PROJEKT
PROJECT
DELAVNICA
WORKSHOP
NATEČAJ
COMPETITION
PREDSTAVITEV
PRESENTATION
DIPLOMA
MASTER THESIS

ABSTRACT

The golden ratio is the ratio we consider perfect and good-looking. It divides a line segment into two unequal parts so that the ratio of the length of the larger line segment to the smaller one is equal to the ratio of the whole length to the longer length of line segment. This ratio is approximate 1,618 and has infinitely many decimal places. The articel presents the golden ratio and its presence in nature, the human body and art. It is also found in architecture, where, because of its beauty, architects often use it in the design of buildings. In this artical is also described history of Gimnazija Kranj. In this research we wanted to find out whether the reason for the beautiful appearance of Gimnazija Kranj is actually due to the golden ratio. We therefore paid special attention to proving the presence of the golden ratio in the architectural elements of Gimnazija Kranj, using measurements from the architectural design. To help find the golden section, we have created a system of points for finding the golden ratio in the GeoGebra computer program and made a pair of compasses for the golden section. The aim or objective of this research paper is therefore to find out whether Gimnazija Kranj is built in the golden ratio. In the end, we were able to confirm its presence in Gimnazija, and we also observed golden spirals and golden rectangles on the building.

KEY-WORDS

golden ratio, proportion, golden spiral, arhitecture, Gimnazija Kranj

Slika 1: Prikaz zlatega reza na daljici.

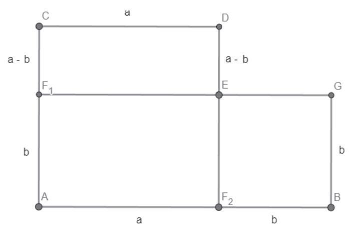
1. UVOD

1.1 Zlati rez

Zlati rez je razmerje, ki se nam zdi popolno in lepega videza. Daljico poljubne dolžine $|AB|$ z zlato točko F razdeli na dva neenaka dela tako, da je razmerje celotne dolžine $|AB|$ proti večjemu delu daljice $|AF|$ enako razmerju večjega dela $|AB|$ proti manjšemu $|FB|$ (Slika 1).

V matematiki to razmerje zapišemo kot enakost razmerij: $\frac{|AB|}{|AF|} = \frac{|AF|}{|FB|} = \phi$. Če pa dolžino $|AF|$ označimo z a, $|FB|$ pa z b, dobimo enakost $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \phi$ (1.1). Dobljeno število iz zlatega razmerja ima neskončno mnogo decimalnih mest. To število v matematiki označujemo z grško črko fi - Φ in je ne glede na dolžino daljice vedno približno enako 1, 618033988 ... To iracionalno število lahko v algebrski obliki zapišemo kot $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ Njegova obratna vrednost pa se označi z φ in je približno enaka 0, 618033988 ...

Zlati rez je prvi omenjal Evklid, antični matematik, in s pomočjo Evklidove definicije, ki pravi: *»Dano daljico razdeli na dva neenaka dela tako, da bo ploščina pravokotnika, očrtanega nad celotno daljico, z višino manjšega dela daljice, enaka ploščini kvadrata, očrtanega na večjem delu daljice,«* lahko zlati rez tudi sami dokažemo (slika 2):



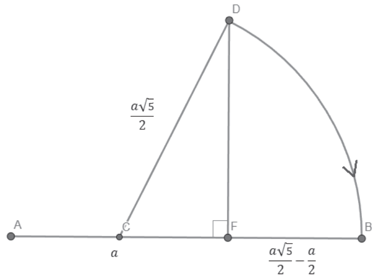
Slika 2: Prikaz Evklidove definicije.

Njegova konstrukcije, ki je prikazana na sliki 2, privede do delitve daljice v razmerju zlatega reza. Torej lahko predpostavimo, da velja $\frac{|AB|}{|AF_2|} = \frac{|AF_2|}{|FB|} = \phi$. Ker sta ploščina pravokotnika $ABGF_1$ in ploščina kvadrata AF_1DC enaki, lahko zapišemo enačbo $b(a+b) = a^2$. Ker nas zanima razmerje $\frac{|AF_2|}{|F_2B|}$ oziroma $\frac{a}{b}$ enačbo preoblikujemo tako, da jo delimo z a in b. Tako dobimo $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$, kar je enako zlatemu razmerju (1.1).

Sedaj pa s pomočjo dobljenega razmerja izračunajmo še zlato število. Če za celotno daljico AB vzamemo dolžino 1 in dolžino daljice F_2B z b, dobimo, da je dolžina AF_2, ki smo jo označili z a, enaka $a = 1 - b$. To vstavimo v zlato razmerje in dobimo enakost $\frac{1}{1-b} = \frac{1-b}{b}$ (1.2). Iz te enakosti izračunamo b, in sicer dobimo $(1-b)(1-b)=b \Rightarrow b^2-3b+1 = 0$. S pomočjo formule za izračun rešitev kvadratne enačbe lahko izračunamo b. Dobimo, da je $b_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{9-4}}{2} \Rightarrow b_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $b_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Rešitev b_1 tukaj ni smiselna, saj vemo, da iščemo manjši del daljice, ki pa ne more biti večji od celotne daljice, za katero smo vzeli dolžino 1. Tako dobimo rešitev $b = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Da bi izračunali zlato število, moramo b vstaviti v zgornjo enakost (1.2):

$$\frac{1}{1-\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\frac{2-3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{2\cdot(-1-\sqrt{5})}{(-1+\sqrt{5})\cdot(-1-\sqrt{5})} =$$

$$\frac{-2(1+\sqrt{5})}{-4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,61803398 \ldots = \phi.$$



Slika 3: Konstrukcija zlatega reza s pomočjo dodatnega zunanjega dela.

Da bomo znali zlati rez tudi narisati si poglejmo njegovo konstrukcijo z dodatnim zunanjim delom. Pri tej konstrukciji bomo podaljšali daljico AF tako, da bo z novo daljico tvorila zlato razmerje, kot je prikazano na sliki 3.

Najprej narišemo daljico AF poljubne dolžine, nato jo razpolovimo in dobimo točko C. V točki F narišemo pravokotno daljico z dolžino $|AF|$. Sedaj lahko narišemo del krožnice skozi točko D s središčem v točki C. Tako dobimo točko B na nosilki daljice AF. Sedaj točka F predstavlja zlato točko na daljici AB.

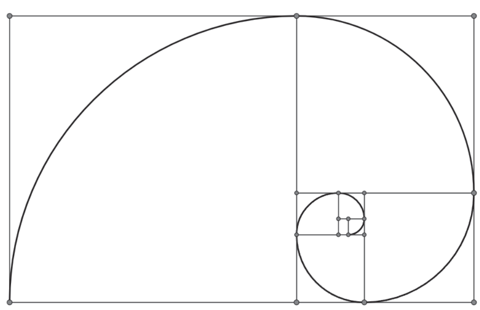
Dokaz, da je F res zlata točka: Naj bo sedaj $|AF| = a$, potem je $|CF| = \frac{a}{2}$. S pomočjo Pitagorovega izreka izračunamo še dolžino hipotenuze CD, in dobimo, da je njena dolžina $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. Ker smo njeno dolžino prenesli na nosilko osnovne daljice, je tudi dolžina daljice CB enaka $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. Tako dobimo, da je $|BF| = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a(-1+\sqrt{5})}{2}$, , kar vstavimo v razmerje:

$$\frac{|AF|}{|BF|} = \frac{a}{a(-1+\sqrt{5})} = \frac{2(-1-\sqrt{5})}{(-1+\sqrt{5})(-1-\sqrt{5})} = \frac{-2-2\sqrt{5}}{1-5} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi \text{ in}$$

$$\frac{|AB|}{|AF|} = \frac{a+\frac{a(-1+\sqrt{5})}{2}}{a} = \frac{\frac{2a+a(-1+\sqrt{5})}{2}}{a} = \frac{a(2-1+\sqrt{5})}{2a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi.$$

Torej res velja, da je razmerje $\frac{|AF|}{|BF|} = \frac{|AB|}{|AF|} = \phi$.

V arhitekturi pogosto poleg zlatega razmerja opazimo tudi zlati pravokotnik. To je pravokotnik, za katerega velja, da sta dolžini stranic v razmerju zlatega reza. Ima zelo zanimivo lastnost, in sicer: če v njem ustvarimo največji možni kvadrat, preostanek ponovno tvori zlati pravokotnik, in tako dalje. In če v dobljene kvadrate vrišemo četrtinske loke krožnice s polmerom stranice posameznega kvadrata in s središčem v notranjem oglišču posameznega kvadrata, dobimo zlato spiralo. Ta je prikazana na sliki 4 in spada v skupino logaritemskih spiral. Zlata spirala je krivulja, pri kateri polmeri lokov v posameznih kvadratih predstavljajo padajoče geometrijsko zaporedje s splošnim členom $r_n = r_1 \cdot \varphi^{n-1}$ pri čemer količnik predstavlja φ oziroma obratno vrednost zlatega števila, polmer loka v največjem kvadratu pa r_1 (Shekhawat, 2015).



Slika 4: Prikaz zlate spirale konstruirane s pomočjo zlatih pravokotnikov.

Zlato razmerje je pogosto tudi v naravi na primer pri razporeditvi semen v cvetu in številu cvetnih listov. In sicer razporeditev cvetnih listov sledi idealni postavi, ki omogoča največjo možno izpostavljenost soncu. Vsak cvetni list zavzema približno 0.618034 – dela celotnega kroga, kar predstavlja obratno vrednost zlatega števila. Podoben princip velja tudi pri spiralni razporeditvi storževih lusk in morski školjki nautilus, ki predstavlja primer zlate spirale. Med svojo rastjo glavonožci potrebujejo več prostora, kar najučinkoviteje zagotavlja zlata spirala. Pri tem se volumen eksponentno povečuje. Če narišemo črto od središča navzven in poiščemo dve mesti, kjer se ta dotakne lupine, bo točka za približno 1,6-krat oddaljena od središča in tako bo tudi z vsako naslednjo. To pomeni, da se lupina z vsako spiralo poveča za Φ. Zlato razmerje se pojavi tudi na različnih delih človeškega in živalskega telesa ter pri razmnoževanju čebel in vzreji zajcev (Pflugerville, 2017).

1.2 Zlati rez v arhitekturi

Pogosto ga zasledimo tudi v umetnosti in arhitekturi. Zlati rez naj bi bil opažen na stavbah starih več kot tisoč let, kot je na primer Velika piramida v Gizi, Partenon v Grčiji, Notre Dame v Franciji, Taj Mahaj v Indiji in Konstantinovem Slavoloku v Italiji (Meisner, 2016). Vse manj pa ga zasledimo v sodobni arhitekturi, eden izmed redkih primerov je na primer Stavba Združenih narodov v New Yorku, kjer naj bi bila višina stavbe 1,6-krat večja od njene širine (Fidanci, 2023).

Nas pa je zanimalo, ali je morda tudi Gimnazija Kranj zgrajena v zlatem rezu. Gimnazija Kranj stoji na predelu mesta, imenovanem Kokriško predmestje, ki ima danes osrednjo upravno, izobraževalno in kulturno funkcijo mesta. Na južnem delu Gimnazije se danes nahaja Hotel Creina, nekoč pa je na tem mestu stala Majdičeva hiša. Nasproti Gimnazije se razprostira Slovenski trg, za njim pa se dviga Delavski dom. Južno od trga se nahaja blagovnica Globus, v kateri je mestna knjižnica, severno pa je zgradba Mestne občine Kranj in Agencije za plačilni promet.

Slika 5: Pogled na Gimnazijo Kranj in park Zvezda.

Ko so v Mestni občini Kranj iskali prostor, kamor bi umestili gimnazijo, so na razpisu prejeli kar nekaj ponudb. Tako bi lahko šola stala na mestih, kjer stoji grad Khislstein, na Slovenskem trgu (nekdanji park Zvezda, ki ga lahko vidimo na sliki 5), ali pa na eni izmed posesti v Kokriškem predmestju. Za mesto, kjer stoji grad, se niso odločili, saj je v njem bival okrajni glavar, prav tako niso želeli uničiti na novo zasajenega drevoreda v parku Zvezda. Tako so se odločili za gradnjo na območju nekdanje župnijske in Križnarjeve pristave.

Prve podrobnejše načrte za Gimnazijo Kranj je izdelal arhitekt Viljem Treo. Z izkopnimi deli je Kranjska stavbinska družba začela leta 1896, dobro leto kasneje pa so jo že slovesno odprli. Kmalu

Slika 6: Gimnazija Kranj v 60. letih.

po izgradnji so ugotovili, da je stavba premajhna glede na število učencev, ki so jo obiskovali. Prva dograditev se je zgodila leta 1897. Druga, s katero so stavbo naredili simetrično glede na južni in severni krak, pa se je začela leta 1902 in končala leto kasneje. Vodilni pri dograditvi je bil stavbenik Josef Fuso, dela pa je nadziral inženir Alojzij Muck. Med drugo svetovno vojno je stavbo zasedla nemška vojska, ki je preoblikovala notranjost ter izdelala instalacije za centralno gretje.

V šestdesetih letih so po načrtih tržaškega arhitekta Maksa Strenarja obnovili fasado, preoblikovali glavni vhod, mu dozidali veliki balkon ter odstranili ograjo okoli stavbe. Leta 1978 so pripravili načrte za gradnjo prizidka, s katerim je šola pridobila 40 odstotkov dodatnih prostorov. Ti so se še povečali, ko so preuredili podstrešne etaže leta 1986 in v obdobju 2016-2017 (Gimnazija Kranj, 2024).

2. METODE

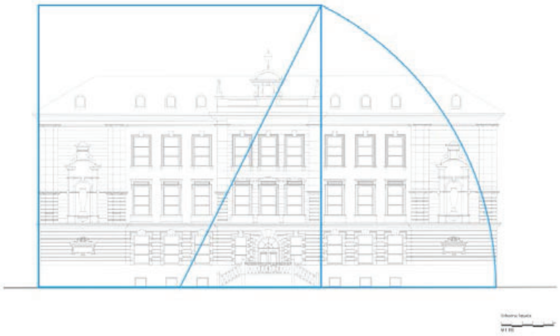
Namen raziskave je bil ugotoviti, ali je Gimnazija Kranj grajena v zlatem rezu, kje se ti nahajajo ter ali iz njih lahko ustvarimo zlate pravokotnike in zlate spirale.

Najprej smo analizirali arhitekturni načrt Gimnazije in si na njem izbrali poljubno daljico AB dela stavbe za katerega smo menili, da je v zlatem rezu, kot je prikazano na sliki 7. Nato smo to daljico razdelili po definiciji zlatega reza, da smo dobili zlato točko. Nato smo izmerili posamezne dele daljice in jih delili po definiciji (1.1), če je bila dobljena številka blizu zlatega števila, smo smatrali, da je ta del Gimnazije v zlatem rezu. Da bi ugotovitev potrdili, smo si pomagali z konstrukcijo zlatega reza (slika 8). Ta postopek smo večkrat ponovili, vendar je precej dolgotrajen. Zato smo iskali druge načine, da bi zlati rez našli hitreje, hkrati pa smo s tem želeli zmanjšati morebitne napake dobljene pri merjenju.

Slika 7: Iskanje zlatega reza s pomočjo ravnila.

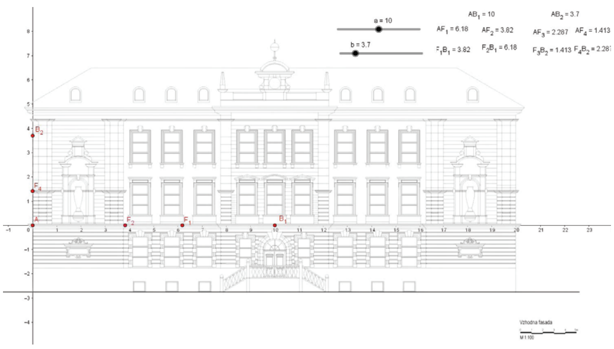
V ta namen smo ustvarili sistem točk v računalniški aplikaciji GeoGebra, ki se glede na našo postavljeno poljubno daljico AB na načrtu Gimnazije, premikajo sorazmerno in prikazujejo zlati točki razmerja, ki sta na sliki 9 označeni kot F_1 in F_2, ne glede za

Slika 8: Iskanje zlatega reza s pomočjo njegove konstrukcije.

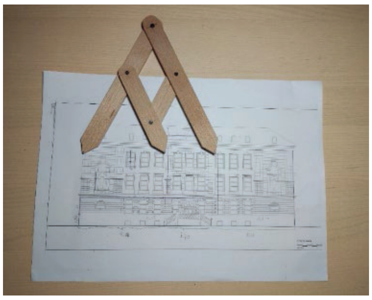


koliko spreminjamo dolžino daljice AB. Program je dostopen na naslovu: https://www.geogebra.org/m/rgzx6mfu ali preko QR kode.

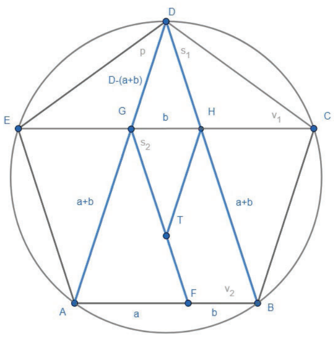
Izdelali smo tudi »napravo« imenovano šestilo za zlati rez (slika 10). Ta deluje tako, da ne glede na to, kako široko razpremo kraka, se zlata točka, ki jo predstavlja srednji krak, spreminja premo sorazmerno. Njegovo natančnost lahko dokažemo s pomočjo njegove konstrukcije in petkotnika, v katerem zlato razmerje najdemo v njegovih diagonalah (slika 11), vendar bomo dokaz izpustili.



Slika 9: Iskanje zlatega reza s pomočjo GeoGebre.



Slika 10: Iskanje zlatega reza s pomočjo šestila za zlati rez.

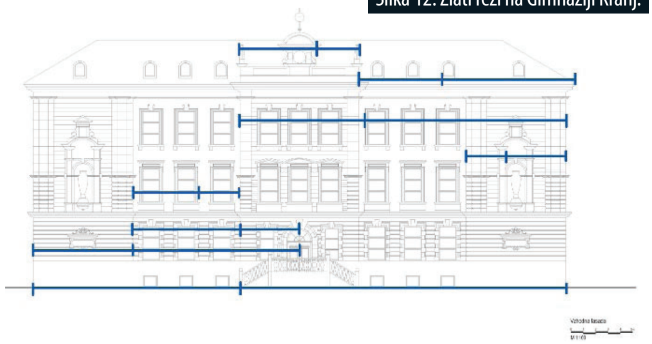


Slika 11: Prikaz konstrukcije šestila za zlati rez v petkotniku.

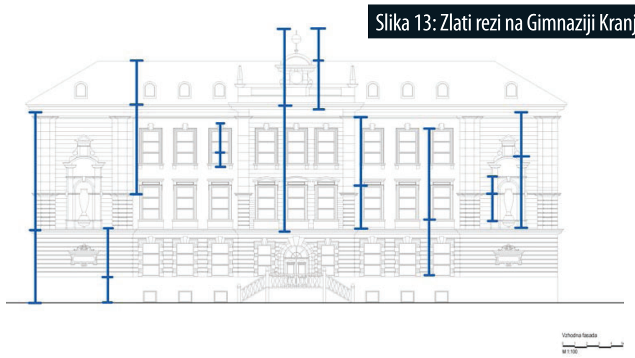
3. REZULTATI

Na slikah 12 in 13 so označeni vsi deli stavbe za katere smo ugotovili, da so v zlatem rezu. Na sliki 13 je na primer v zlatem razmerju višina gimnazije do zgornjega nadstropja, ki je vidna čisto levo. Zlato točko ima na stiku prvega in drugega nadstropja. V zlatem rezu je tudi sredinski del stavbe do zgornjega nadstropja in od zgornjega nadstropja do vrha globusa, ki stoji na strehi Gimnazije. Poleg tega so v zlatem razmerju tudi deli niš v katerih sta vazi, različne dolžine in višine nadstropij, vhod ter razmiki med posameznimi okni in drugi deli stavbe.

Slika 12: Zlati rezi na Gimnaziji Kranj.



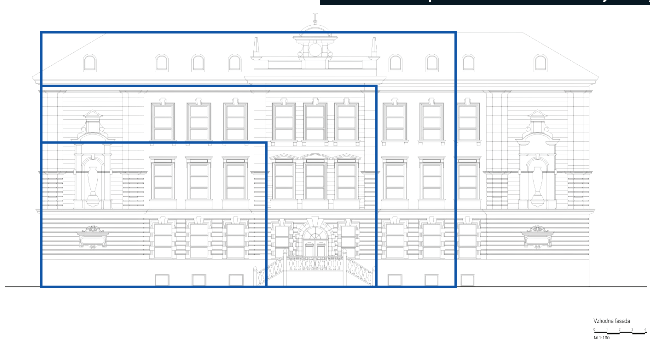
Slika 13: Zlati rezi na Gimnaziji Kranj.



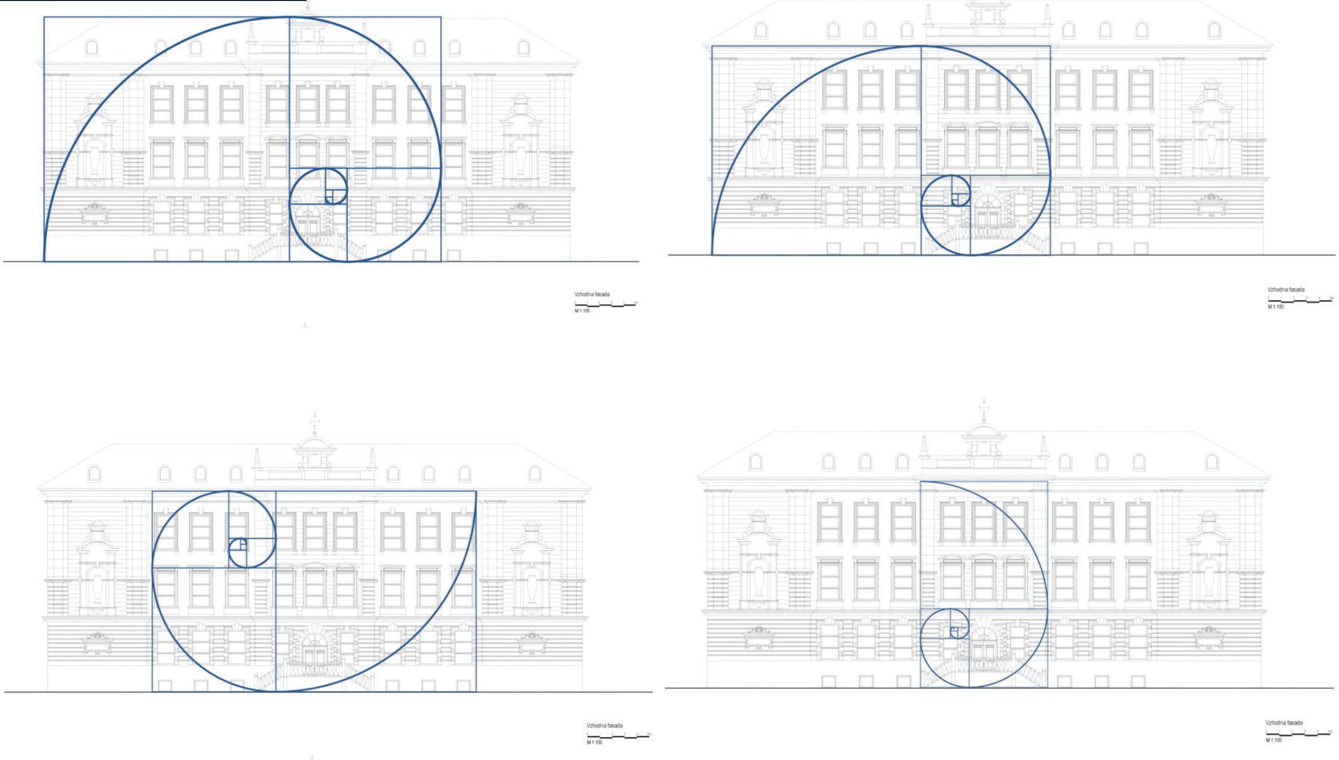
Ko imamo vsa zlata razmerja Gimnazije Kranj označene na enem mestu, hitro opazimo, da ta ponekod skupaj tvorijo zlate pravokotnike, prikazane na sliki 14 in sliki 15.

Slika 14: Zlati pravokotniki na Gimnaziji Kranj.

Slika 15: Zlati pravokotniki na Gimnaziji Kranj.



Slika 16: Zlate spirale na Gimnaziji Kranj.



Ker že iz teorije vemo, da se zlati pravokotniki delijo naprej, lahko to opazimo tudi na Gimnaziji. Kot vidimo na sliki 16, lahko ustvarimo zlate spirale.

Vsaka izmed spiral je ustvarjena v zlatih pravokotnikih. Ti na vsaki sliki točno predstavljajo zlati rez na določenem delu Gimnazije. Na prvi spirali največji pravokotnik v zlatem rezu deli levi del stavbe in levo stranico skrajno desnih oken. Naslednji zlati pravokotnik na prvi spirali deli celotno višino stavbe v zlatem rezu, ki se nahaja na spodnjem delu sredinskih oken. In tako se še naprej ustvarjajo zlati pravokotniki, ki razdelijo vedno manjši del gimnazije v zlatem rezu. Enak potek deljenja pravokotnikov in s tem nastajanja zlatih rezov ter spiral je tudi pri ostalih treh zlatih spiralah.

4. ZAKLJUČEK

Med seboj smo primerjali različne dele Gimnazije in ugotovili smo, da so v zlatem rezu razmerja med okni, nadstropji in različnimi detajli na fasadi. Medtem ko razmerje med višino in dolžino Gimnazije ni v zlatem rezu. S pomočjo šestila za zlati rez in sistemom točk v GeoGebri pa smo našli še več zlatih razmerij. Z njihovo pomočjo smo na Gimnaziji Kranj opazili tudi zlate pravokotnike in zlate spirale.

Pri iskanju zlatega reza na stavbi pa se pojavi problem v tem, da kljub načrtu ne moremo biti prepričani ali so vsi zlati rezi, spirale in pravokotniki na Gimnaziji tam z namenom ali le po naključju zaradi lepšega videza.

ZAHVALA

Iskreno se zahvaljujeva najini profesorici matematike, Žani Lampič, ki nama je pomagala pri raziskovanju in ustvarjanju članka. Ter arhitektu Juretu Hrovatu, ki je sodeloval pri prenovi notranjega dela gimnazije leta 2018 in nama tako posredoval načrt Gimnazije Kranj.

LITERATURA IN VIRI

Fidanci, E. A. (2023). Golden Ratio Samples in Architecture #1. https://illustrarch.com/articles/15613-golden-ratio-samples-in-architecture-1.html

Gimnazija Kranj. (2024). 120 let gimnazijske stavbe v Kranju. [Razstava]. Gimnazija Kranj, Kranj, Slovenija.

Hrovat, J. (2018). Gimnazija Kranj: obstoječe stanje. Kranj, Slovenija: Gimnazija Kranj.

Mathnasium. (25. 7. 2024). *The golden ratio in nature.* https://www.mathnasium.com/blog/golden-ratio-in-nature

Meisner, G. (16. 5. 2012). *Phi basics. The Golden Ratio: Phi, 1.618.* https://www.goldennumber.net/category/phi-basics/

Sen, E. A. (12. 5. 2023). *Golden Ratio Samples in Architecture #1.* https://illustrarch.com/articles/15613-golden-ratio-samples-in-architecture-1.html

Shekhawat, K. (3. 4. 2015). Why golden rectangle is used so often by architects: A mathematical approach. *Alexandria Engineering Journal*, *54*(2). https://doi.org/10.1016/j.aej.2015.03.012

UVODNIK
EDITORIAL
ČLANEK
ARTICLE
RAZPRAVA
DISCUSSION
RECENZIJA
REVIEW
PROJEKT
PROJECT
DELAVNICA
WORKSHOP
NATEČAJ
COMPETITION
PREDSTAVITEV
PRESENTATION
DIPLOMA
MASTER THESIS